

Intérêt de la notion de vecteurs et du Th. de Thalès

(Réf. Pythagore Seine, 1991 §, ex 43 p 167)

Soit ABCD un quadrilatère.

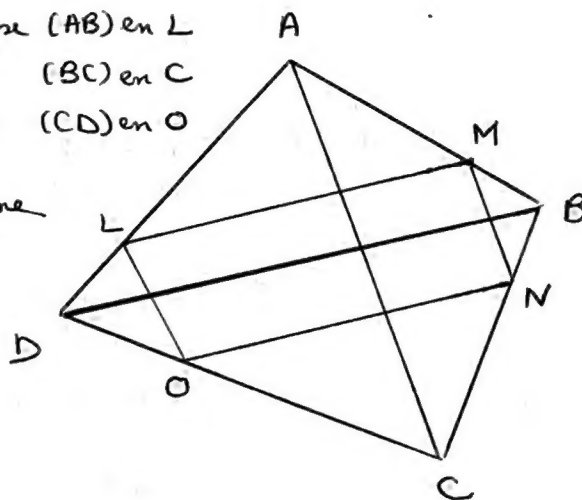
Soit $M \in [AB]$.

La parall. à (BD) passant par M coupe (AB) en L

" (AC) " M " (BC) en C

" (BD) " N " (CD) en O

Hq LMNO est un parallélogramme



- Solution utilisant Thalès et sa réciproque :

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DL}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DO}} \Rightarrow (LO) \parallel (AC) \quad \text{réc. Thalès}$$

donc $(LO) \parallel (AC) \parallel (MN)$. Comme $(LM) \parallel (BD) \parallel (ON)$ par contr. (...)

- Maquillage en termes de vecteurs (idée : Thalès)

Si $\overrightarrow{BA} = k \overrightarrow{BM}$, compte tenu des droites parallèles, on obtient $\overrightarrow{BC} = k \overrightarrow{BN}$, puis $\overrightarrow{DC} = k \overrightarrow{DO}$ (1). D'autre part $\overrightarrow{BA} = k \overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{DA} = k \overrightarrow{DL}$ (2). Donc

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{LO}$$

Finalement, comme $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{MN}$, on trouve $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LO}$ \square

- Soit Hq ABCD et le parall. LMNO ont même cdg si ABCD est un parallélogramme.

Soit G le cdg de ABCD : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$$\left\{ \begin{array}{l} M \text{ bary de } A(1), B(k) \Rightarrow \overrightarrow{GM} = \frac{\overrightarrow{GA} + k \overrightarrow{GB}}{1+k} \\ L \text{ bary de } A(1), D(k) \Rightarrow \overrightarrow{GL} = \frac{\overrightarrow{GA} + k \overrightarrow{GD}}{1+k} \\ N \text{ bary de } C(1), B(k) \Rightarrow \overrightarrow{GN} = \frac{\overrightarrow{GC} + k \overrightarrow{GB}}{1+k} \\ O \text{ bary de } C(1), D(k) \Rightarrow \overrightarrow{GO} = \frac{\overrightarrow{GC} + k \overrightarrow{GD}}{1+k} \end{array} \right.$$

donc

$$\begin{aligned}\vec{GL} + \vec{GM} + \vec{GN} + \vec{GO} &= \frac{2}{1+k} (\vec{GA} + \vec{GC} + k\vec{GB} + k\vec{GD}) \\ &= \frac{2}{1+k} (k-1) (\vec{GB} + \vec{GD})\end{aligned}$$

Ainsi

$$G \text{ est barycentre de } LMNO \Leftrightarrow \vec{GB} + \vec{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{GA} + \vec{GC} = \vec{0} \\ \vec{GB} + \vec{GD} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} [AC] \text{ et } [BD] \\ \text{se coupent} \\ \text{en leur} \\ \text{milieu} \end{array}}$$

□